Intégrales doubles et triples - M—

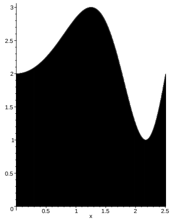
Michel Fournié

fournie@mip.ups-tlse.fr

0- Intégrales simples (rappel)

Définition : Intégrale définie

- Soit f définie continue sur $I = [a, b]$ telle que $f(x) > 0$



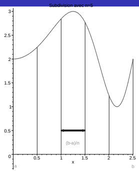
- On peut alors délimiter une surface par :
  le graphe de f, l'axe Ox, les droites $x = a$, $x = b$,
  puis lui associer un nombre réel noté S appelé

  $\boxed{\text{aire de la surface}}$

  (l'unité de mesure étant un cube de coté 1).

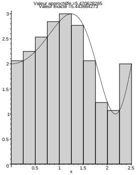
Valeurs approchées - Intégrale définie

- Une valeur approchée I_n de S peut être obtenue en partageant I en n parties égales $x_0 = a, \cdots, x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \cdots, x_n = b$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$



- et en calculant la somme des aires des rectangles de base $\frac{b-a}{n}$ et de hauteurs $f(x_1), \cdots, f(x_n)$:

$$I_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + \cdots + f(x_k) + \cdots + f(x_n)\right]$$



Définition (Propriété admise):

Si f est continue sur $[a, b]$ alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = I(f)$.

$I(f)$ sera appelée intégrale définie de la fonction f continue entre les bornes a et b

1.1- Intégrale Double

Définition: Intégrale Double

- D un domaine inscrit dans le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ (borné, connexe de $\mathbb{R}^2$),
- f une fonction définie continue sur D (prolongée par zéro à l'extérieur de D)
- on subdivise $[a, b]$ en n parties

$$\{x_0 = a, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n = b\}, \ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

- on subdivise $[c, d]$ en m parties

$$\{y_0 = c, y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_m = d\}, \ \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

- $r_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ un rectangle élémentaire

ainsi on a subdivisé D en $n \times m$ parties $(r_{ij})_{i,j}$

- l'intégrale de f sur D est définie par

$$I(f) = \iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ r_{ij}\subset D}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\ \Delta x_i \Delta y_j$$

1.2- Interprétation graphique

- S_f surface représentative de f dans un repère orthonormé
- $p_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [0, f(x_i, y_j)]$ un parallélépipède élémentaire et $v_{ij} = f(x_i, y_j)\ \Delta x_i \Delta y_j$ le volume de p_{ij}

$$I(f) = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ r_{ij}\subset D}} \sum_i \sum_j v_{ij} = \text{volume de V}$$

- V est le volume intérieur au cylindre droit de section D limité par la surface S_f d'équation z=f(x,y) et le plan $z = 0$

Cas particulier: Si $f(x,y) = 1$ alors $\iint_D dxdy =$ aire de D.
$ds = dxdy$ est l'élément d'aire en coordonnées cartésiennes

1) Calcul de l'Intégrale Double

1)- Première Décomposition

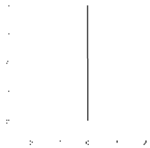
• D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ_D intersectée au plus en deux points par toute droite d'équation x=cte,

(Γ_D est continuement différentiable sauf en un nombre fini de points)

• $(r_{ij})_{i,j}$ une subdivision de D en rectangles élémentaires

• si f est une fonction de deux variables définie et continue sur D, l'intégrale double de f sur D est définie par:

$$\begin{aligned} I(f) &= \iint_D f(x,y)\,dxdy \\ &= \lim_{r_{ij}\subset D} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx \end{aligned}$$



• $[a,b]$ est la projection orthogonale de D sur (Ox)

• $[y_1(x), y_2(x)]$ est l'intersection de D avec la droite $x = cte$

Première Décomposition (démo)

Partant de $I(f) = \lim \sum_i (\lim \sum_j \; f(x_i, y_j)\Delta y_j)\Delta x_i$

on remarque que

$$\lim \; \sum_j f(x_i, y_j)\Delta y_j = \int_{y_1(x_i)}^{y_2(x_i)} f(x_i, y) \; dy = \; A(x_i) \text{ d'où}$$

$$I(f) = \lim \sum_i A(x_i)\Delta x_i = \int_a^b \; A(x)dx$$

$$I(f) \; = \; \iint_D f(x, y) \; dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \; dy \; \right\} \; dx$$

Exemple

Michel Fournié

Calculer $I = \iint_D x \, dxdy$ avec

$$D = \left[(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2x \right]$$

$$[a, b] = [0, 1], [y_1(x), y_2(x)] = [0, 2x]$$

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^{2x} x \, dy \right\} dx = \int_0^1 x \, [\ \ y]_0^{2x} \ dx$$

$$I = \int_0^1 2x^2 \, dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

2) Deuxième Décomposition

- D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ_D intersectée au plus en deux points par toute droite d'équation y=cte, (Γ_D est continuement différentiable sauf en un nombre fini de points)
- $(r_{ij})_{i,j}$ une subdivision de D en rectangles élémentaires
- si f est une fonction de deux variables définie et continue sur D, l'intégrale double de f sur D est définie par:

$$\begin{aligned} I(f) &= \iint_D f(x,y)\,dxdy \\ &= \lim_{r_{ij}\subset D} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j \\ &= \int_c^d \left\{ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy \end{aligned}$$

- $[c,d]$ est la projection orthogonale de D sur (Oy)
- $[x_1(y), x_2(y)]$ est l'intersection de D avec la droite $y = cte$

Deuxième Décomposition (démo)

Partant de $I(f) = \lim \sum_j \left\{ \lim \sum_i f(x_i, y_j)\, \Delta x_i \right\} \Delta y_j$

on remarque que

$$\lim \sum_i f(x_i, y_j)\, \Delta x_i = \int_{x_1(y_j)}^{x_2(y_j)} f(x, y_j)\, dx = B(y_j) \text{ d'où}$$

$$I(f) = \lim \sum_j B(y_j)\, \Delta y_j = \int_c^d B(y) dy$$

$$I(f) = \iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx \right\} dy$$

Exemple

Calculer $I = \iint_D x \, dxdy$ avec

$$D = \left[(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2x\right]$$

$$[c, d] \ = \ [0, 2] \quad , \quad [x_1(y), x_2(y)] \ = \left[\frac{y}{2}, 1\right]$$

$$I = \int_0^2 \left\{ \int_{\frac{y}{2}}^1 x \, dx \right\} dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^1 dy$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 (1 - \frac{y^2}{4}) \, dy \ = \frac{1}{2}\left[y - \frac{y^3}{12}\right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

1.4- Propriétés de l'Intégrale Double

Elles découlent de celles de l'intégrale simple.
Pour f et g intégrables sur D.

a) Propriétés liées à la fonction

$I(f+g) = I(f) + I(g)$ et $I(\lambda f) = \lambda I(f) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

si $f \geq 0 \Longrightarrow I(f) \geq 0$

b) Propriétés liées au domaine

si $(D_1 \cup D_2) = D$ et si l'aire de $(D_1 \cap D_2)$ est nulle $\Longrightarrow$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

a) Rappel sur l'intégrale simple

Soit φ une application de $[t_1, t_2]$ sur $[a, b]$, dérivable et inversible, on pose $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad \text{où} \quad \varphi(t_1) = a \quad \text{et} \quad \varphi(t_2) = b$$

L'expression suivante est équivalente à celle ci-dessus.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}([a,b])} f[\varphi(t)] \;\; |\varphi'(t)|dt$$

Remarque: Suivant le signe de $\varphi'(t)$, $\varphi^{-1}([a, b]) = [t_1, t_2]$ ou $[t_2, t_1]$, ce qui conduit à $\varphi'(t) \times (t_2 - t_1) > 0$ pour $(a < b)$.

b) Changement de variables dans une intégrale double

On admettra sans démonstration le théorème suivant:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\Delta=\varphi^{-1}(D)} f[\varphi(u,v)]|J(u,v)|dudv$$

où les fonctions x et y admettent des dérivées partielles continues sur Δ

$\varphi(u,v) = [x(u,v), y(u,v)]$ une application inversible de $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ (portant sur u et v) sur $D \subset \mathbb{R}^2$ (portant sur x et y), telle que $D = \varphi(\Delta) \Longrightarrow \Delta = \varphi^{-1}(D)$ et

$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = x'_u(u,v)y'_v(u,v) - x'_v(u,v)y'_u(u,v)$ est le Jacobien de φ qui ne doit pas s'annuler sur Δ pour que l'application φ soit inversible.

c) Cas particulier important: les coordonnées polaires

On considère les variables

$$\boxed{x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \quad , \quad y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta}$$

le Jacobien est alors

$$\boxed{J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\theta & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho}$$

On vérifie les hypothèses précédentes en imposant à (ρ,θ) les deux contraintes suivantes

$$\boxed{\rho > 0 \text{ et } \theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi[}$$

$ds = \rho d\rho d\theta$ est l'élément d'aire en coordonnées polaires

d) Application : calcul de l'aire du disque

Soit D le disque de rayon a centré à l'origine d'un repère orthonormé, d'inéquation $\mathbf{x}^2 + y^2 \leq a^2$
le domaine Δ est défini par:
$\theta \in [0, 2\pi[\ ,\ \rho > 0$ et $\rho^2 \leq a^2$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta = \{\ (\rho, \theta) \in \boldsymbol{R}^2\ /\ 0 < \rho \leq a \ \text{ et } \ \theta \in [0, 2\pi[\}}$$

On remarque que le disque D est transformé en un rectangle dans le plan (ρ, θ).

$$\text{Aire de } D = \iint_D dxdy = \iint_\Delta \rho \ \ d\rho d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a \rho d\rho \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^a d\theta \ \Longrightarrow \boxed{\text{aire de } D = \pi a^2}$$

Définition de l'intégrale triple

- D un domaine borné et connexe de $\mathbb{R}^3$, inscrit dans le parallélépipède $[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$
- f une fonction définie continue sur le domaine D, prolongée par zéro à l'extérieur de D
- $\{x_0{=}a,\ldots,x_i,\ldots,x_n{=}b\}$ subdivision de $[a,b]$, $\Delta x_i{=}x_i-x_{i-1}$
- $\{y_0{=}c,\ldots,y_j,\ldots,y_m{=}d\}$ subdivision de $[c,d]$, $\Delta y_j{=}y_j-y_{j-1}$
- $\{z_0{=}e,\ldots,z_k,\ldots,z_p{=}h\}$ subdivision de $[e,h]$, $\Delta z_k{=}z_k-z_{k-1}$
- $p_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1}-z_k]$
- $(p_{ijk})_{i,j,k}$ subdivision de D en parallélépipèdes élémentaires
- l'intégrale de f sur D est définie par :

$$\boxed{I(f)=\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\lim_{p_{ijk}\subset D}\sum_i\sum_j\sum_k f(x_i,y_j,z_k)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k}$$

Cas particulier: Si $f(x,y,z)=1$ alors $\iiint_D dxdydz=$ Volume de D $dv=dxdydz$ est l'élément de volume en coord. cartésiennes

Propriétés de l'intégrale triple

Elles découlent de celles de l'intégrale simple et de l'intégrale double pour f et g intégrables sur D.

1) Propriétés liées à la fonction

$I(f+g) = I(f) + I(g)$ et $I(\lambda f) = \lambda I(f) \ \ \forall \lambda \in \boldsymbol{R}$

Si $f \geq 0$ alors $I(f) \geq 0$

2) Propriétés liées au domaine

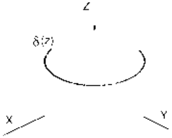
Si $D_1 \cup D_2 = D$ et si le volume de $D_1 \cap D_2$ est nul alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\, dxdydz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\, dxdydz$$

Calcul de l'intégrale triple

1) Première Décomposition

Soit f une fonction définie et continue sur D, l'intersection de D par tout plan d'équation z=cte est un ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$



$$I(f) = \lim_{p_{ijk} \subset D} \sum_k \left\{ \lim \sum_i \sum_j f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \right\} \Delta z_k$$

$$\boxed{I(f) = \iiint_D f(x,y,z)\ dxdydz = \int_e^h \left\{ \iint_{\delta(z)} f(x,y,z)\ dxdy \right\} dz}$$

- $[e,h]$ est la projection orthogonale de D sur (Oz)
- $\delta(z)$ est l'intersection de D avec le plan $z = cte$

Exemple d'application

$$I = \iiint_D dx \quad dy \quad dz \text{ avec}$$

$$D = \left[(x, y, z) \in R^3 / \ 0 \le x, \ 0 \le y, \ 0 \le z, \ x + y + z \le 1\right]$$

$$\text{Ici } [e, h] = [0, 1]$$

$$\delta(z) = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 / \ 0 \le x, \ 0 \le y, \ 0 \le z, x + y \le 1 - z\right\}$$

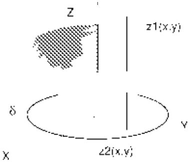
$$I = \int_0^1 \left\{\iint_{\delta(z)} dxdy\right\} dz = \int_0^1 \text{aire de } \delta(z) dz$$

$$I = \int_0^1 \left[\frac{(1-z)^2}{2}\right] dz = \left[-\frac{(1-z)^3}{6}\right]_0^1$$

$$\boxed{= \text{volume de D} = \frac{1}{6}}$$

Deuxième Décomposition

Soit f une fonction définie et continue sur D, l'intersection de D par toute droite parallèle à (oz) est un intervalle connexe de $\boldsymbol{R}$



$$I(f) = \lim_{p_{ijk} \subset D} \sum_i \sum_j \left\{ \lim \sum_k f(x_i, y_j, z_k) \Delta z_k \right\} \Delta x_i \Delta y_j$$

$$\boxed{I(f) = \iiint_D f(x,y,z) dxdydz = \iint_\delta \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right\} dxdy}$$

- δ est la projection orthogonale de D sur le plan (xOy)
- $[z_1(x,y), z_2(x,y)]$ est l'intersection de D avec la droite d: intersection des deux plans $x =$cte et $y =$cte

Exemple d'application

$$I = \iiint_D dxdydz \text{ avec}$$
$$D = \left[(x,y,z) \in R^3 /\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z,\ x+y+z \leq 1\right]$$

Ici $\delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x+y \leq 1\right\}$ et
$[z_1(x,y), z_2(x,y)] \ = \ [0, 1-x-y]$

$$I = \iint_\delta \left\{\int_0^{1-x-y} dz\right\} dxdy = \iint_\delta (1-x-y)dxdy =$$
$$\int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} (1-x-y)dy\right\} dx = \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]_0^{1-x} dx$$
$$I = \left[-\frac{(1-y)^3}{6}\right]_0^1 = \text{volume de D=}\boxed{\frac{1}{6}}$$

2.4- Changement de variables dans l'intégrale triple

1) Cas général

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Delta=\Phi^{-1}(D)} f[\Phi(u,v,w)]|J(u,v,w)|dudvdw}$$

où $\Phi(u,v,w) = [x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]$ est une application **inversible** de $\Delta \subset \boldsymbol{R}^3$ (portant sur u,v et w) sur $D \subset \boldsymbol{R}^3$ (portant sur x,y et z), on a

$D = \Phi(\Delta) \iff \Delta = \Phi^{-1}(D)$

les fonctions x , y et z admettent des dérivées partielles continues sur Δ , où J le Jacobien de Φ est défini par:

$$J = J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} = z'_u \begin{vmatrix} x'_v & y'_v \\ x'_w & y'_w \end{vmatrix} + z'_v \begin{vmatrix} x'_w & y'_w \\ x'_u & y'_u \end{vmatrix} + z'_w \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

$J = z'_u(x'_v y'_w - x'_w y'_v) + z'_v(x'_w y'_u - x'_u y'_w) + z'_w(x'_u y'_v - x'_v y'_u) \neq 0$ sur Δ.

Ce Jacobien ne doit pas s'annuler sur Δ pour que l'application Φ soit inversible.

Coordonnées cylindriques

2) Les coordonnées cylindriques

les variables $\boxed{x(\rho,\theta,z)=\rho\cos\theta,\ y(\rho,\theta,z)=\rho\sin\theta,\ z=z}$

les conditions d'inversibilité

$\rho>0$ et $\theta\in[\alpha,\alpha+2\pi[$

le Jacobien

$$J(\rho,\theta,z)=\begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho$$

$dv=\rho d\rho d\theta dz$ est l'élément de volume en coordonnées cylindriques

Application: Calcul du volume du cylindre

M—

Michel Fournié

- Soit D le cylindre droit d'axe de rotation (Oz),
- d'inéquations $x^2 + y^2 \leq a^2$ et $0 \leq z \leq h$
- le domaine Δ est défini par:

$\theta \in [0, 2\pi[\ ,\ \rho > 0\ ,\ \rho^2 \leq a^2$ et $0 \leq z \leq h \Longrightarrow$

$$\boxed{\Delta = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ 0 < \rho \leq a\ ,\ \theta \in [0, 2\pi[\text{ et } 0 \leq z \leq h \right\}}$$

- volume de $D = \iiint_D dxdydz = \iiint_\Delta \rho d\rho d\theta dz =$

$$\int_0^h \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a \rho d\rho \right\} d\theta \right\} dz$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{volume du cylindre} = \pi a^2 h}$ le cylindre est transformé en parallèlépipède dans l'espace (ρ, θ, z)

Les coordonnées sphèriques

les variables

$$\boxed{x(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta\cos\varphi, y(r,\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi, z = r\sin\varphi}$$

les conditions d'inversibilité

$r > 0 \quad , \quad \theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$

et $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

le Jacobien

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$\boxed{J(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\varphi}$$

$dv = r^2\cos\varphi dr d\theta d\varphi$ est l'élément de volume en coordonnées sphèriques

Application: calcul du volume de la sphère

- Soit D la sphère de rayon "a" centrée à l'origine d'un repère orthonormé, d'inéquation $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$
- le domaine Δ est défini par:

$\theta \in [0, 2\pi[$, $r > 0$, $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $r^2 \leq a^2 \Longrightarrow$

$$\boxed{\Delta = \left\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \;/ 0 < r \leq a, \theta \in [0, 2\pi[, \text{et } \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}}$$

- volume de $D = \iiint_D dxdydz = \iiint_\Delta r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi =$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a r^2 dr \right\} d\theta \right\} d\varphi \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{volume de la sphère} = \frac{4}{3}\pi a^3}$$

Remarque : la sphère est transformée en parallèlépipède dans l'espace (r, θ, φ)